

An Alternative Modeling Framework for Aggregate Production Planning

Jakob Asmundsson, Reha Uzsoy, and Ronald L. Rardin

Laboratory for Extended Enterprises at Purdue

School of Industrial Engineering

1287 Grissom Hall

Purdue University

West Lafayette, In 47907-1287

November 4, 2002

以下は、弊社の製品をご利用の皆様のお役に立てようとして、参考として、
英文を翻訳したものです。したがって、翻訳が誤っているかも知れません。
したがって、どうぞ、英文の論文も、併せお読み下さる様をお願い致します。

1 イントロダクション

OR、および、経営科学が生れて以来、生産、および、配送のモデルは、多数の文献により議論されてきました。この分野の基本的な問題は、計算的に扱いやすいモデルの開発でした。これらのモデルには、研究の対象とするシステムが持つダイナミックな側面を正確に反映することが期待されています。ここでの基本的な問題は、マクロ的な計画に使われる数理計画モデルと運営分析に使われる待ち行列モデルやシミュレーションモデルとの間には大きな溝であるように思われます。待ち行列モデルにより、クリティカルなシステムパフォーマンスの尺度、特に、リードタイムは、システムのキャパシティのワークロード、言い換えると、稼働率によって影響されることが判りました。具体的には、リードタイムは、システムの稼働率が100%に近づくと、その平均、分散ともに、非線形に増加することです。他方、マクロ的な計画に使われる数理計画モデルは、基本的な堂々巡りで苦勞してきています。時間に依存して変動する需要 (time-varying demands) を対象に生産を計画する場合に、生産計画作成の計算に、固定されたリードタイムを使います。しかし、これらのモデルから生れてくる意思決定は、所与の期間で生産施設に投入される仕事を決定しますが、これにより、実現しなければならない稼働率、および、リードタイムが決まってきます。

本小論は、Graves 1986; Karmarkar 1989、Srinivasan et al. 1988などの多数の人たちにより開発されたたくさんのアイディアに基づき、仕事量とリードタイムの非線形な関係を正確にとらえるシステムをモデル化する数理計画的なフレームワークを提案することを目的としています。著者たちは、キャパシティを制約された資源のスループットをWIP の関数とする clearing functions のアイディアを使います。この小論では、単一製品システムを対象とする簡略された定式化を提示します。複数製品への拡張、および、詳細な議論については、Asmundsson et al. 2002を参照して下さい。

2 Clearing Functions

Little's Law から、WIPが増大するときに、リードタイムを固定するには、スループットが比例的に増大しなければならないのは明らかです。ワークロードとは無関係に、リードタイムを固定できるということは、暗黙的にキャパシティが無限大であるという仮定を置いています。したがって、スループットがリードタイムに比例的である代わりに、throughput-WIP curve (clearing function) が、システムの理論的なキャパシティに近づくと連れ、レベルオフします。このことは、nonlinear clearing function を使って、下図に例示されています。

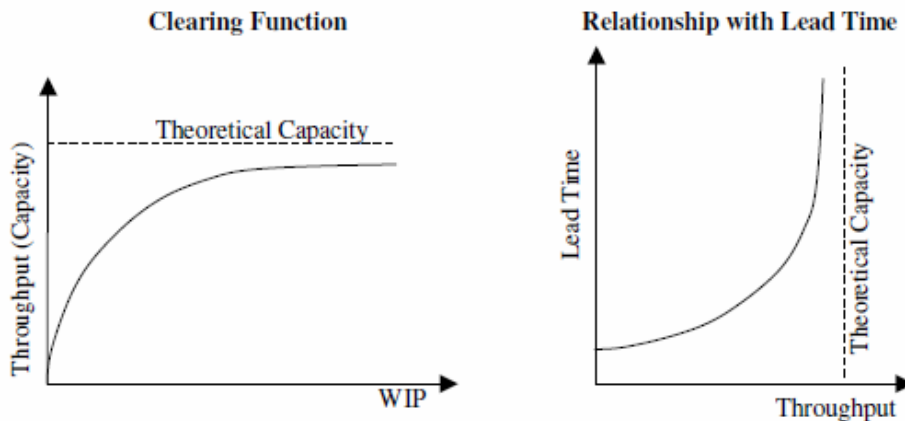


図 1 throughput, WIP, lead time の関係 (Karmakar 1989)

Little's Law により、WIPとリードタイムは、直接的に比例するので、対応するリードタイムとスループットの間の関係も描けます。これは、右側の図で示されています。スループットが理論的な限界に近づくと、予想リードタイムは無限大になって行くことに注意して下さい。このように、WIPとスループットの間の関係をとらえることにより、リードタイムのダイナミクスが、数学的なモデルとしてとらえられるようになります。

3 モデルの定式化

Karmarkar (1989) and Srinivasan et al. (1988)に沿い、ここでは、製品が一つ、期間が一つのシステムを対象とする簡略された定式化を提示します。複数期間システムへの拡張は容易ですが、複数製品への拡張は、もっと掘り下げた議論が必要です。ここでは、例示を目的として、システムの在庫合計を最小化するという目的関数を置きますが、この他にもいろいろな目的関数が考えられるでしょう。

$$\text{Minimize } \sum_{i=1}^T \text{WIP}_i + \text{FGI}_i$$

このシステムの在庫は、WIPと最終製品FGIで構成されているので、モデルの定式化には、この両方についての物質収支が必要です。期末のWIPは、期初のWIPから、その期のスループットを差し引き、その期の原材料のリリースRELを加えたものです。

$$\text{WIP}_t = \text{WIP}_{t-1} - \text{TP}_t + \text{REL}_t \quad t=1..T$$

同様に、最終製品の在庫は、期初の在庫に、その期のスループットを加え、満たした需要を差し引いたものです。

$$FGI_t = FGI_{t-1} + TP_t - Demand_t \quad t=1..T$$

ここで、需要はすべて、遅れることなく満たされ、バックログは発生しないと仮定しています。この仮定は、通常の方法で緩和することもできます。

ここでの定式化の中心は、キャパシティの制約式で、下記のようになります。

$$TH_i \leq f(WIP_{i-1}) \quad t=1..T$$

伝統的なLPモデルでは、右辺は定数ですが、それとは異なり、キャパシティは、期初のWIPレベルの関数になっていることに注意して下さい。期初のWIPを使うべきか、それとも、その期の平均WIPを使った何らかの基準を使うべきかについての議論については、Karmarkar (1989)、Asmundsson et al. (2002)を参照して下さい。ここでは、その期のcongestionの度合いを表す尺度として、期初のWIPレベル、したがって、effective capacityを使います。

まず、ここで、右辺のclearing functionを詳しく見てみましょう。これまでに、clearing function、および、どのようにして、clearing function を導出するかについては議論していません。

clearing functionは、待ち行列の分析から、分析的に、または、数値的に導出できますし、異なるWIPレベルのスループットvalueのサンプリング観測により、シミュレーションモデルから推定できます。

次に、clearing functionは非線形なので、非線形プログラミングが必要となります。しかし、clearing functionはconcaveなので、clearing functionは、 $f(WIP_i) = \min_{c=1..C} \{ \alpha_{ct} WIP_i + \beta_{ct} \}$ の形式

の直線のconvex hullで近似できます。

こうして、キャパシティの制約式は、下記のようになります。

$$TH_i \leq \alpha_{ct} WIP_i + \beta_{ct} \quad t=1..T, \quad c = 1..C$$

こうして得られた定式化は線形で、Xpress-MPのようなソルバーで解けます。

4 Xpress-MPでの定式化

このアプローチを読者の皆さんにも試して頂こうと考え、G/G/1 queuing systemのsimple exampleをここに示します。clearing functionは、分析的に導出し (Asmundsson et al. 2002)、5本の直線で近似しました。

Xpress-Mosel として数学モデルを定式化して、解くことは容易です。下記に、それを示します。

```

model "Aggregate Production Planning"
  uses "mmxprs"

  T:=30
  C:=5
  declarations
    Alpha:array(1..C) of real
    Beta:array(1..C) of real
    Demand:array(0..T) of real
    TP:array(0..T) of mpvar
    REL:array(0..T) of mpvar
    WIP:array(0..T) of mpvar
    FGI:array(1..T) of mpvar
    Initial_WIP:real
    Initial_FGI:real
  end-declarations

  initializations from "model.dat"
    Alpha Beta Demand Initial_WIP Initial_FGI
  end-initializations

  forall(t in 1..T)
    WIP(t)=if(t>1,WIP(t-1),Initial_WIP) - TP(t) + REL(t)

  forall(t in 1..T)
    FGI(t)=if(t>1,FGI(t-1),Initial_FGI) + TP(t) - Demand(t)

  forall(t in 1..T, c in 1..C)
    TP(t)<=Alpha(c)*WIP(t-1) + Beta(c)

  Total_Inventory:= sum(t in 1..T) (WIP(t) + FGI(t))

  minimize(Total_Inventory)

end-model

```

ランダムに生成される需要を使い、これを解くと、下図に要約されているような結果が得られます。

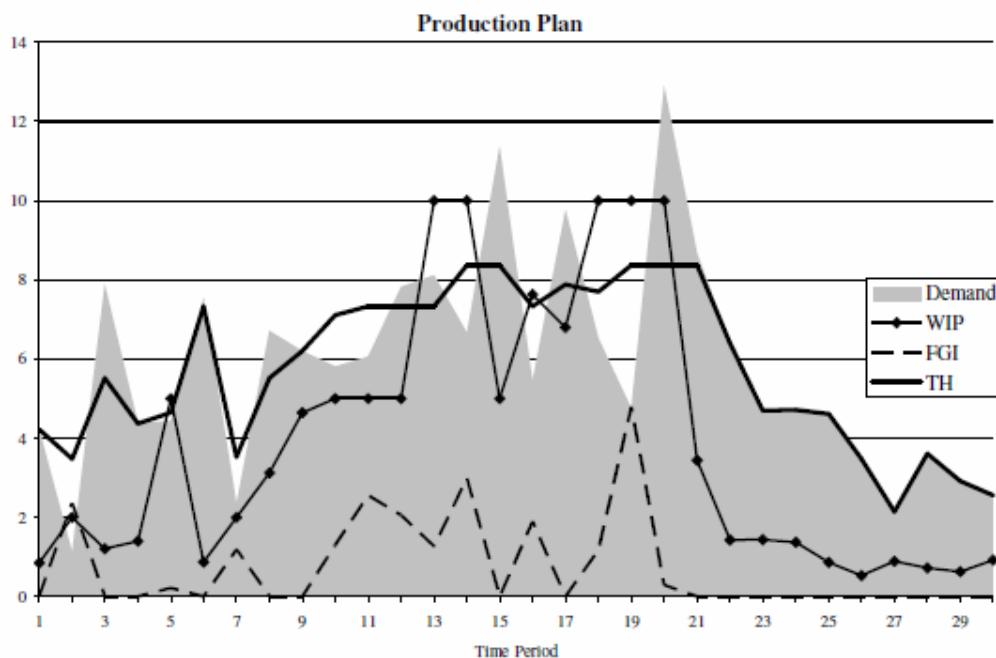


図 - 2 生産計画

スループットがあまり高くない期では、ケースによっては、最終製品の在庫がnon-zero であることに注意して下さい。これは、わずかなスループット（キャパシティ）の増加は、WIPの増加を保障するには小さすぎることを、そして、事前に在庫を生産しておき、FGIを持つほうが経済的であるという事実によります。実際、この例題でのスループットは、理論的キャパシティである10 units近くには、決してなりません。最初の5期では、FGIを保有しなくても、需要のすべてを満たせるにもかかわらず、最適解はFGIを持っています。累積的リリースを累積的なスループットに比較することで、計画生産リードタイムが導出できます(Figure 3)。生産リードタイムが、かなり、変化し、その範囲が、計画期間で、0.2 to 1.2 periods であることに注意して下さい。これらは、原材料のraw processing timeの0.1 periodsよりもかなり大きいです。

興味深い質問は、「仮に、固定されたリードタイム推定値に基づく伝統的なLPモデルを使うとすると、いくら長さのリードタイムの推定値を使うべきか」という質問です。決して、raw processing time ではありません。なぜなら、raw processing time は、実際のリードタイムを大幅に過小評価するだろうからです。その結果として起こることの一つは、原材料のリリースの遅れで、その結果、需要は決して充足されません。

平均リードタイムを利用するとどうでしょうか。この場合、原材料のリリースは、早すぎるか遅すぎるかのどちらかです。その結果、ある期では、需要が満たされず、また、ある

期では、在庫が過剰になります。

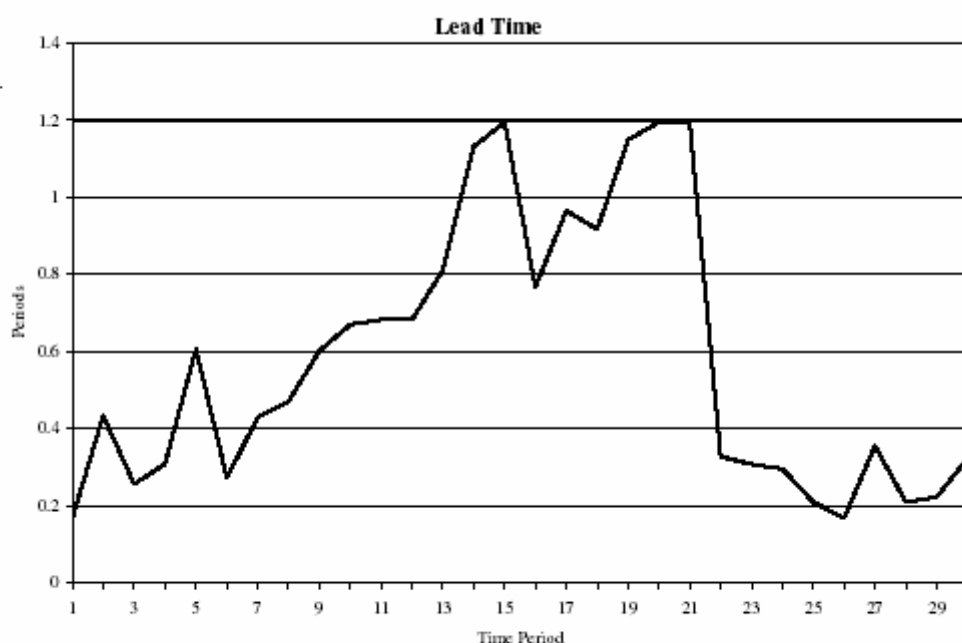


Figure 3 Production lead time

5 結論

この研究の目的は、計算的に扱いやすいモデル作成のフレームワークを開発することでした。そして、このフレームワークは、ワークロード、リードタイム、キャパシティ間に存在するnonlinear dynamics をとらえるものでなければなりません。これは、ネットワークが単一の工場のワークステーションから構成されていようと、また、サプライチェーンのノードであろうとに関係なく、生産ネットワークを正確にモデル化するときの基本です。定式化では、リードタイムは暗黙的にとらえられているので、数理計画プログラムは、選択された目的関数を使って、システムのパフォーマンスを最適化するリードタイムを生み出します。キャパシティを表すのに使われるclearing functionのconcavityを利用することで、比較的、扱いやすく、解くことも容易な、生産問題のLPによる定式化が可能となります。

6 謝辞

この研究は、The Laboratory for Extended Enterprises at Purdue (LEEAP), the UPS Foundation, and NSF Grants DMI-0075606 and DMI-0122207 through the Scalable Enterprise Systems Initiative によりサポートされて行なわれました。また、ソフトウェアを使わせていただいた、Dash Optimization社のDr. Alkis Vazacopoulos のも感謝いたします。この小論で使ったmathematical programのモデル化、および、その解を得るために、Xpress-IVEを使用しました。このソフト

ウェアにより、私たちは、最小のプログラミング努力で、いろいろなシナリオを調べ、私たちのモデルを、他のモデル作成テクニックと対比してテストすることができました。

7 List of References

Asmundsson, J., R. L. Rardin, and R. Uzsoy (2002). “Tractable Nonlinear Capacity Models for Aggregate Production Planning”, Research Report, Laboratory for Extended Enterprises at Purdue, Purdue university, West Lafayette, In 47907-1287.s

Graves, S. C. (1985). “A Tactical Planning Model for a Job Shop” *Operations Research*, 34, pp. 552-533.

Karmarkar, U. S. (1989). “Capacity Loading and Release Planning with Work-in-Progress (WIP) and Lead-times” *J. Mfg. Oper. Mgt.*, 2, pp. 105-123.

Medhi, J. (1991). *Stochastic Models in Queuing Theory*, Academic Press.

Srinivasan, A., M. Carey and T. E. Morton (1988). “Resource Pricing and Aggregate Scheduling in Manufacturing Systems” Unpublished paper, GSIA, Carnegie-Mellon University.